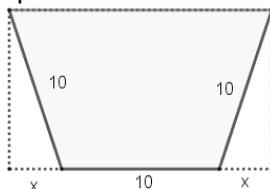


## .Opción A

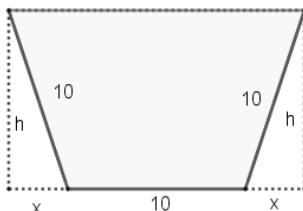
### Ejercicio 1 opción A, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

Se desea construir una canaleta, para la recogida de agua, cuya sección es como la de la figura. La base y los costados deben medir 10 cm y se trata de darle la inclinación adecuada a los costados para obtener una sección de área máxima. Se pide:



- [0,25 puntos] Halla la altura de la canaleta en función de  $x$  (ver la figura).
- [0,75 puntos] Halla el área de la sección de la canaleta en función de  $x$ .
- [1,5 puntos] Encuentra el valor de  $x$  que hace máximo dicho área.

### Solución



Es un problema de optimización.

- Halla la altura de la canaleta en función de  $x$  (ver la figura).

Tenemos un triángulo rectángulo y aplicamos el Teorema Pitágoras  $10^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h = \sqrt{100 - x^2}$

$$h = \pm \sqrt{100 - x^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cómo es} \\ \text{longitud} \end{array} \right\} = +\sqrt{100 - x^2}$$

- Halla el área de la sección de la canaleta en función de  $x$ .

$$\begin{aligned} \text{Área de la sección} &= (\text{área del rectángulo}) - 2 \cdot (\text{área triángulo}) = \\ &= (\text{base rectángulo} \cdot \text{altura}) - 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \text{base triángulo} \cdot \text{altura} \right) = (10 + 2x) \cdot h - (x \cdot h) = \\ &= (10 + 2x) \cdot \sqrt{100 - x^2} - x \cdot \sqrt{100 - x^2} = A(x) \end{aligned}$$

- Encuentra el valor de  $x$  que hace máximo dicho área.

La función a optimizar es el área  $A(x) = (10 + 2x) \cdot \sqrt{100 - x^2} - x \cdot \sqrt{100 - x^2}$ .

Sabemos que si  $f'(b) = 0$  y  $f''(b) < 0$ ,  $x = b$  es un máximo relativo de  $f(x)$ .

$$\begin{aligned} \text{Derivando tenemos: } A'(x) &= 2 \cdot \sqrt{100 - x^2} + (10 + 2x) \cdot \left( \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} \right) - 1 \cdot \sqrt{100 - x^2} - x \cdot \left( \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} \right) = \\ &= 2 \cdot \sqrt{100 - x^2} - \left( \frac{10x + 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \right) - \sqrt{100 - x^2} + \left( \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \right) = \\ &= \frac{2 \cdot (100 - x^2) - 10x - 2x^2 - (100 - x^2) + x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 10x + 100}{\sqrt{100 - x^2}} \end{aligned}$$

De  $A'(x) = 0$  tenemos:  $-2x^2 - 10x + 100 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 50 = 0$ , de donde  $x = 5$  y  $x = -10$  (no vale porque las longitudes son positivas)

Veamos que es un máximo. De  $A''(x) = \frac{(-4x - 10) \cdot \sqrt{100 - x^2} - (-2x^2 - 10x + 100) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}}{(\sqrt{100 - x^2})^2}$ , tenemos

$$A''(5) = \frac{(-30) \cdot \sqrt{75} - (0)}{(\sqrt{75})^2} \cong -3,46 < 0, \text{ luego } x = 5 \text{ cm es un máximo relativo de } A(x).$$

### Ejercicio 2 opción A, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

[2'5 puntos] Determina la función  $f : (1+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sabiendo que  $f''(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 2$  es  $y = x + 2$ .

#### Solución

Aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI), que nos dice: Si  $f(x)$  es continua en  $[a,b]$  entonces la función  $G(x) = \int_a^x [f(t)]dt$  es derivable y su derivada es  $G'(x) = (\int_a^x [f(t)]dt)' = f(x)$ .

En la práctica  $f(x) = \int f'(x)dx$ ;  $f'(x) = \int f''(x)dx$ ;  $f''(x) = \int f'''(x)dx$ , etc.....

Cómo nos dicen que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 2$  es  $y = x + 2$ , por un lado tenemos que  $f'(2) = y' = 1$ , y por otro  $f(2) = y(2) = (2) + 2 = 4$ , pues en el punto de tangencia coinciden.

$$\text{Tenemos } f'(x)dx = \int f''(x)dx = \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \left\{ \begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} \cdot dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + K = \frac{-1}{t^1} + K = \frac{-1}{x-1} + K .$$

$$\text{De } f'(2) = 1 \rightarrow 1 = -1/(2-1) + K \rightarrow K = 2, \text{ luego } f'(x) = \frac{-1}{x-1} + 2$$

$$\text{Por el TFCI, } f(x) = \int f'(x)dx = \int \left( \frac{-1}{x-1} + 2 \right) dx = -\ln|x-1| + 2x + L, \text{ como } f(0) = 1 \text{ tenemos:}$$

$$\text{De } f(2) = 4 \rightarrow 4 = -\ln(2-1) + 2 \cdot (2) + L \rightarrow L = 0, \text{ luego } f(x) = -\ln(x-1) + 2x.$$

### Ejercicio 3 opción A, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  y  $C = (1 \ 1 \ 2)$ .

a) [1 punto] Calcula  $A^{2018}$ .

b) [1'5 puntos] Determina, si existe, la matriz  $X$  que verifica  $A(X + 2I) = BC$  donde  $I$  es la matriz identidad

#### Solución

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  y  $C = (1 \ 1 \ 2)$ .

a)  
Calcula  $A^{2018}$ .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Aunque la demostración correcta es por el método de}$$

$$\text{inducción, se ve que } A^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 2018 & 2018 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)  
Determina, si existe, la matriz  $X$  que verifica  $A(X + 2I) = BC$  donde  $I$  es la matriz identidad

$$\text{Como } \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \text{ (En una matriz triangular su determinante es el producto de los elementos}$$

de su diagonal principal), existe su matriz inversa  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t)$ .

De  $A(X + 2I) = BC$ , tenemos  $A \cdot X + 2A = BC$ , de donde  $A \cdot X = BC - 2A$ .

Multiplicando ambos miembros de la igualdad  $A \cdot X = BC - 2A$  por la izquierda por  $A^{-1}$  tenemos:

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot (BC - 2A) \rightarrow I_3 \cdot X = A^{-1} \cdot (BC) - 2 A^{-1} \cdot A \rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{BC}) - 2 \cdot \mathbf{I}_3.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{luego } A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego } \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{BC}) - 2 \cdot \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 2) \right) - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

#### Ejercicio 4 opción A, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

Considera las rectas  $r$  y  $s$  dadas por  $r \equiv \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$ .

- a) [1 punto] Estudia y determina la posición relativa de  $r$  y  $s$ .  
 b) [1,5 puntos] Determina la recta perpendicular común a  $r$  y a  $s$ .

#### Solución

Considera las rectas  $r$  y  $s$  dadas por  $r \equiv \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$ .

- a)  
 Estudia y determina la posición relativa de  $r$  y  $s$ .

De la recta "r" tomamos un punto, el A y un vector director, el  $\mathbf{u}$ .

Para el punto tomo  $y = 0$ , con lo cual  $x = 7$  y  $z = 3$ . Punto  $A(7,0,3)$ .

El vector  $\mathbf{u}$  lo calculo como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la

recta "r", es decir  $\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0+2) - \mathbf{j}(0+1) + \mathbf{k}(2-1) = (2, -1, 1)$ .

De la recta "s" tomamos un punto, el B y un vector director, el  $\mathbf{v}$ .

Para el punto tomo  $z = 0$ , con lo cual  $x = 2$  e  $y = -3$ . Punto  $B(2,-3,0)$ .

El vector  $\mathbf{v}$  lo calculo como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la

recta "s", es decir  $\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(1-0) = (0, 0, 1)$

Como los vectores  $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$  de "r" y  $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$  de "s" no son proporcionales, los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  no son paralelos, por tanto las rectas "r" y "s" tampoco lo son, luego "r" y "s" se cortan o se cruzan.

Si  $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ , "r" y "s" se cortan, con  $\mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (2, -3, 0) - (7, 0, 3) = (-5, -3, -3)$

Si  $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$ , "r" y "s" se cruzan.

Como  $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} -5 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  Adjuntos tercera =  $+(1) \cdot (5 + 6) = 11 \neq 0$ , luego las rectas "r" y "s" se cruzan.

- b)  
 Determina la recta perpendicular común a  $r$  y a  $s$ .

Un punto A de "r" es  $A(7,0,3)$  y un vector director es  $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$ .

Un punto B de "s" es  $B(2,-3,0)$  y un vector director es  $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ .

De la recta  $r(A; \mathbf{u})$  tomamos un punto genérico  $P(x, y, z) = P(7+2\lambda, 0 - \lambda, 3+\lambda) = P(7+2\lambda, -\lambda, 3+\lambda)$

De la recta  $s(B; \mathbf{v})$  tomamos un punto genérico  $Q(x, y, z) = Q(2, -3, 0+\mu) = Q(2, -3, \mu)$

El vector  $\mathbf{PQ}$  tiene que ser perpendicular al vector director de "r"  $\mathbf{u}$  y al vector director de "s"  $\mathbf{v}$  a la vez, es

decir su producto escalar ( $\bullet$ ) tiene que ser cero:

$$\mathbf{PQ} = (2-7-2\lambda, -3+\lambda, \mu-3-\lambda) = (-5-2\lambda, -3+\lambda, -3-\lambda+\mu)$$

$$\mathbf{PQ} \bullet \mathbf{u} = 0 = (-5-2\lambda, -3+\lambda, -3-\lambda+\mu) \bullet (2, -1, 1) = 0 = -10-4\lambda+3-\lambda-3-\lambda+\mu = -10-6\lambda+\mu = 0.$$

$$\mathbf{PQ} \bullet \mathbf{v} = 0 = (-5-2\lambda, -3-\lambda, -3-\lambda+\mu) \bullet (0, 0, 1) = 0 = -3-\lambda+\mu \rightarrow \mu = 3+\lambda$$

Sustituyendo  $\mu = 3 + \lambda$  en  $-10 - 6\lambda + \mu = 0$  tenemos  $-10 - 6\lambda + 3 + \lambda = 0 \rightarrow -7 - 5\lambda = 0$ , de donde  $\lambda = -7/5$  y  $\mu = 3 + (-7/5) = 8/5$ .

Ya tenemos los valores de " $\lambda$ " y " $\mu$ ".

Entrando en el punto genérico P con el valor de  $\lambda = -7/5$ , obtenemos el punto P determinado que es  $P(7+2(-7/5), -(-7/5), 3+(-7/5)) = P(21/5, 7/5, 8/5)$

Entrando en el punto genérico Q con el valor de  $\mu = 8/5$ , obtenemos el punto Q determinado que es  $Q(2, -3, (8/5)) = Q(2, -3, 8/5)$

La recta perpendicular a ambas pedida, "t", es la que pasa por los punto P y Q, es decir  $t(Q; \mathbf{PQ})$

Punto Q(2, -3, 8/5), vector  $\mathbf{PQ} = (2, -3, 8/5) - (21/5, 7/5, 8/5) = (-11/5, -22/5, 0)$ . Otro vector paralelo de la recta perpendicular pedida sería el  $\mathbf{w} = (1, 2, 0)$

**La recta pedida en forma vectorial es  $t \equiv (x, y, z) = (2, -3, 2/5) + \delta(1, 2, 0)$  con  $\delta \in \mathbb{R}$ .**

*Con este método es fácil tener errores de cálculo, a veces es útil dar la recta perpendicular como corte de dos planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ . Donde  $\pi_1$  contiene a la recta r y a la dirección perpendicular  $\mathbf{uxv}$ , y  $\pi_2$  contiene a la recta s y a la dirección perpendicular  $\mathbf{uxv}$ .*

## Opción B

### Ejercicio 1 opción B, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

Sea la función f definida por  $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$  para  $x \neq 1$

- [0,75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.
- [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus máximos y mínimos relativos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
- [0,75 puntos] Esboza la gráfica de f indicando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

#### Solución

Sea la función f definida por  $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$  para  $x \neq 1$

- Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Como el denominador se anula para  $x = 1$ , si  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ ,  $x = 1$  será asíntota vertical de f(x).

Tenemos  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{e^x}{x-1} \right) = \frac{e^1}{1^+ - 1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$ , luego **la recta  $x = 1$  es una asíntota vertical de la gráfica de f.**

Para la posición relativa  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{e^x}{x-1} \right) = \frac{e^1}{1^- - 1} = \frac{e}{0^-} = -\infty$

Veamos la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f.

Regla de L'Hôpital (L'H): Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$  y existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . La regla sirve

también para  $\frac{\infty}{\infty}$ , y cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x-1} \right) = \left\{ \frac{e^{+\infty}}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}; \text{L'H} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{1} \right) = \frac{+\infty}{1} = +\infty$ , **la gráfica de f no tiene asíntota horizontal en  $+\infty$ .**

**Tampoco tiene asíntota oblicua  $y = mx + n$ , en  $+\infty$** , porque al calcular  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x^2 - x} \right)$  nos

saldría, al aplicar dos veces la Regla de L'Hôpital  $+\infty/2 = +\infty$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{-x}}{(-x)-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^{+x} \cdot (-x-1)} \right) = \frac{1}{+\infty \cdot (-\infty)} = \frac{1}{-\infty} = 0$ , **la recta  $y = 0$  es una asíntota horizontal de  $f$  en  $-\infty$ , y está por debajo de la gráfica de  $f$ .**

**Como tiene asíntota horizontal en  $-\infty$ , no tiene asíntota oblicua en  $-\infty$ .**

b)

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$  y halla sus máximos y mínimos relativos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

*Me piden la monotonía. Estudio de  $f'(x)$*

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}; \quad f'(x) = \frac{e^x \cdot (x-1) - e^x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}.$$

De  $f'(x) = 0$ , tenemos  $e^x \cdot (x-2) = 0$ , {es cero el numerador} tenemos  $(x-2) = 0$  (sabemos que la exponencial  $e^x$  nunca se anula), de donde  $x = 2$ , que será el posible extremo relativo.

Como  $f'(0) = \frac{e^0 \cdot (0-2)}{(0-1)^2} = \frac{-2}{1} < 0$ ,  **$f$  es estrictamente decreciente ( $\searrow$ ) en  $(-\infty, 2) - \{1\}$ .**

Como  $f'(3) = \frac{e^3 \cdot (3-2)}{(3-1)^2} = \frac{e^3}{4} > 0$ ,  **$f$  es estrictamente creciente ( $\nearrow$ ) en  $(2, +\infty)$ .**

Por definición  **$x = 2$  es un mínimo relativo y vale  $f(2) = \frac{e^2}{2-1} = e^2 \cong 7.4$ .**

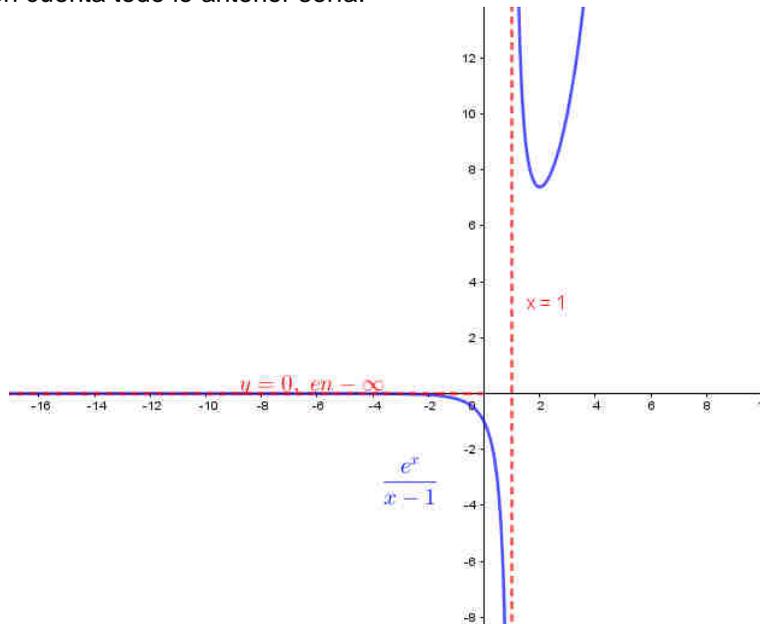
c)

Esboza la gráfica de  $f$  indicando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

Para  $x = 0$ , tenemos  $f(0) = \frac{e^0}{0-1} = 1/-1 = -1$ . Punto de corte  $(0, -1)$ .

Si  $f(x) = 0$ , tenemos  $e^x = 0$ , y ya sabemos que nunca vale cero.

Un esbozo teniendo en cuenta todo lo anterior sería:



### Ejercicio 2 opción B, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x \cdot \cos(x/2)$ .

a) [1'75 puntos] Calcula  $\int f(x) dx$

b) [0'75 puntos] Encuentra la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el punto  $(0, 1)$ .

#### Solución

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x \cdot \cos(x/2)$ .

a)

Calcula  $\int f(x) dx$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos(x/2) dx \Rightarrow v = \int \cos(x/2) dx = 2 \cdot \text{sen}(x/2) \end{array} \right\} = x \cdot 2\text{sen}(x/2) - \int 2\text{sen}(x/2) dx =$$

$$= 2x \cdot \text{sen}(x/2) - 2(-2\cos(x/2)) + K = \mathbf{2x \cdot \text{sen}(x/2) + 4 \cdot \cos(x/2) + K.}$$

b)

Encuentra la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el punto  $(0, 1)$ .

De  $F(0) = 1$  tenemos  $1 = 2(1) \cdot \text{sen}(0) + 4 \cdot \cos(0) + K = 4 + K$ , de donde  $K = -3$  y **la primitiva pedida es  $F(x) = 2x \cdot \text{sen}(x/2) + 4 \cdot \cos(x/2) - 3$ .**

### Ejercicio 3 opción B, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + 2y + 4z = m \end{cases}$$

a) [1'75 puntos] Discute el sistema en función del parámetro  $m$ .

b) [0'75 puntos] Si es posible, resuelve el sistema para  $m = 1$ .

#### Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + 2y + 4z = m \end{cases}$$

a)

Discute el sistema en función del parámetro  $m$ .

Matriz de los coeficientes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ , matriz ampliada  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & m \end{pmatrix}$ .

En  $A$ ,  $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1 & 4-m \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = 1 \cdot ((m-1) \cdot (4-m) - 1 \cdot (1-m)) =$

$$= (m-1) \cdot (4-m) + 1 \cdot (m-1) = (m-1) \cdot (4-m+1) = (m-1) \cdot (5-m).$$

De  $\det(A) = 0$  tenemos  $(m-1) \cdot (5-m) = 0$ , por tanto  $m = 1$  y  $m = 5$ .

Si  $m \neq 1$  y  $m \neq 5$ , tenemos **rango(A) = rango(A\*) = 3 = n° de incógnitas, sistema compatible y determinado y tiene solución única.**

Si  $m = 1$ , tenemos  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ , matriz ampliada  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ .

Vemos que tanto  $A$  como  $A^*$  tiene dos filas iguales por tanto se puede suprimir una de ellas, además en  $A$  como  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$ , tenemos **rango(A) = rango(A\*) = 2 < n° de incógnitas, sistema compatible e indeterminado y tiene más de una solución (infinitas en nuestro caso).**

Si  $m = 5$ , tenemos  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ , matriz ampliada  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ .

En  $A$  como  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4 \neq 0$ , tenemos **rango(A) = 2.**

En  $A^*$  como  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = 1 \cdot (16 - 0) = 16 \neq 0$ , tenemos **rango(A\*) = 3.**

Por el Teorema de Rouché, **como rango(A) = 2  $\neq$  rango(A\*), el sistema es incompatible y no tiene solución.**

b)  
Si es posible, resuelve el sistema para  $m = 1$ .

Hemos visto en el apartado (a) que si  $m = 1$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < \text{número de incógnitas}$ , y *el sistema era compatible e indeterminado y tenía infinitas soluciones*

Como  $\text{rango} = 2$ , tomamos dos ecuaciones ( $2^a$  y  $3^a$ , que son las que he utilizado para obtener el menor de orden 2 de  $A$  distinto de cero) y dos incógnitas principales:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases} \quad (F_2 - F_1) \approx \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 3z = 0 \end{cases}, \text{ tomando } z = b \in \mathbb{R} \text{ tenemos } y = -3b \text{ y } x = 1 - (-3b) - b = 1 + 2b,$$

la **solución del sistema para  $m = 1$  es:  $(x, y, z) = (1 + 2b, -3b, b)$**  con  $b \in \mathbb{R}$ .

#### Ejercicio 4 opción B, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

Considera los puntos  $A(2, -1, -2)$  y  $B(-1, -1, 2)$ , y la recta  $r$  dada por  $x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 1}{2}$ .

- a) [1 punto] Determina los puntos del segmento  $AB$  que lo dividen en 3 segmentos de la misma longitud.  
b) [1,5 puntos] Determina un punto  $C$  de  $r$  de forma que el triángulo  $ABC$  sea rectángulo en  $C$ .

#### Solución

Considera los puntos  $A(2, -1, -2)$  y  $B(-1, -1, 2)$ , y la recta  $r$  dada por  $x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 1}{2}$ .

- a)  
Determina los puntos del segmento  $AB$  que lo dividen en 3 segmentos de la misma longitud.



$A(2, -1, -2)$  y  $B(-1, -1, 2)$ . Nos piden los puntos  $M$  y  $N$  que dividen al segmento en tres partes iguales.

Observamos la siguiente igualdad entre vectores  $\mathbf{AB} = 3\mathbf{AM}$

$$\mathbf{AB} = (-3, 0, 4)$$

$$\mathbf{AM} = (x - 2, y + 1, z + 2)$$

De  $\mathbf{AB} = 3\mathbf{AM}$  obtenemos  $(-3, 0, 4) = (3x - 6, 3y + 3, 3z + 6)$ , e igualando miembro a miembro se tiene  $-3 = 3x - 6$ , de donde  $x = 1$ ,  $0 = 3y + 3$ , de donde  $y = -1$  y  $4 = 3z + 6$ , de donde  $z = -2/3$ , es decir **el punto  $M$  es  $M(x, y, z) = M(1, -1, -2/3)$ .**

También se observa que el punto  $N$  es el punto medio del segmento  $MB$ , es decir **el punto  $N$  es  $N(x, y, z) = N((1 - 1)/2, (-1 - 1)/2, (-2/3 - 2)/2) = N(0, -1, 2/3)$ .**

**Los puntos pedidos son  $M(1, -1, -2/3)$  y  $N(0, -1, 2/3)$ .**

- b)  
Determina un punto  $C$  de  $r$  de forma que el triángulo  $ABC$  sea rectángulo en  $C$ .

Tenemos  $A(2, -1, -2)$  y  $B(-1, -1, 2)$ , y ponemos "r" en forma vectorial  $r \equiv (x, y, z) = (1, 1, 1) + \delta(1, -1, 2) = (1 + \delta, 1 - \delta, 1 + 2\delta)$  con  $\delta \in \mathbb{R}$ . Un punto genérico de "r" es  $C(1 + \delta, 1 - \delta, 1 + 2\delta)$ .

Como nos dicen que  $ABC$  sea rectángulo en  $C$ , formamos los vectores  $\mathbf{AC}$  y  $\mathbf{BC}$ , que tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar ( $\bullet$ ) tiene que ser cero. De dicha ecuación obtendremos los valores de  $\delta$  y los puntos pedidos.

$$\mathbf{AC} = (1 + \delta - 2, 1 - \delta + 1, 1 + 2\delta + 2) = (-1 + \delta, 2 - \delta, 3 + 2\delta)$$

$$\mathbf{BC} = (1 + \delta + 1, 1 - \delta + 1, 1 + 2\delta - 2) = (2 + \delta, 2 - \delta, -1 + 2\delta)$$

$$\mathbf{AC} \bullet \mathbf{BC} = 0 = (-1 + \delta, 2 - \delta, 3 + 2\delta) \bullet (2 + \delta, 2 - \delta, -1 + 2\delta) = 0 = (-1 + \delta) \cdot (2 + \delta) + (2 - \delta) \cdot (2 - \delta) + (3 + 2\delta) \cdot (-1 + 2\delta) = 6\delta^2 + \delta - 1 = 0$$

Tenemos  $\delta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12}$ , por tanto las soluciones son  $\delta = 4/12 = 1/3$  y  $\delta = -6/12 = -1/2$ .

**Para  $\delta = 1/3$  tenemos el punto de la recta  $C_1(1 + (1/3), 1 - (1/3), 1 + 2(1/3)) = C_1(4/3, 2/3, 5/3)$ .**

**Para  $\delta = -1/2$  tenemos el punto de la recta  $C_2(1 + (-1/2), 1 - (-1/2), 1 + 2(-1/2)) = C_2(1/2, 3/2, 0)$ .**